

PENYELESAIAN *VEHICLE ROUTING PROBLEM WITH TIME WINDOWS* DENGAN PENDEKATAN *GOAL PROGRAMMING*

Atmini Dhoruri, Eminugroho R., Dwi Lestari

Abstrak

Tujuan dari penelitian ini adalah membentuk model *vehicle routing problem with time windows*. Model yang diperoleh diselesaikan dengan *goal programming*. Selanjutnya, diterapkan pada rute distribusi *Liquified Petroleum Gas* (LPG). Untuk 5 node yang digunakan dalam simulasi menggunakan LINGO dengan waktu maksimal yang diberikan adalah 6 jam per minggu, maka semua node dapat terlayani. Ketika waktu maksimal yang diberikan 3 jam per minggu, maka hanya 2 node yang dapat terlayani.

Kata kunci: *vehicle routing problem with time windows, goal programming, rute, LPG*

Abstract

In this paper, we propose a model for vehicle routing problem with time windows. The model solved by goal programming. Furthermore, it is applied to the distribution of Liquefied Petroleum Gas (LPG). For 5 nodes which used in the simulation using LINGO with the maximum time is 6 hours per week, all nodes can be served. If the maximum time given 3 hours per week, only 2 nodes can be served.

Key word: vehicle routing problem with time windows, goal programming, route, LPG

1. Pendahuluan

Konversi minyak tanah ke *Liquified Petroleum Gas* (LPG) dilandasi oleh Perpres No 104 Tahun 2007. Berdasarkan perpres tersebut, maka terdapat harga patokan LPG 3 kg yang dipayungi oleh Keputusan Menteri Energi dan Sumber Daya Mineral No: 3175 K/10/MEM/2007 untuk Tahun 2007 dan Keputusan Menteri Energi dan Sumber Daya Mineral No: 1661 K/12/MEM/2008 untuk Tahun 2008. Pemerintah pun mendapat keuntungan hingga 25 triliun rupiah hingga tahun 2011 atas program konversi ini (Kementerian ESDM, 2011).

Keuntungan konversi minyak tanah ke LPG tidak hanya diperoleh pemerintah, tetapi juga masyarakat sebagai pengguna LPG. Selain pemakaian energy yang bersih dan ramah lingkungan, LPG juga menurunkan emisi gas karbon. Sedang pembakaran dengan minyak tanah mengandung asap dan menimbulkan gas karsinogen.

Seiring dengan suksesnya program konversi minyak tanah ke LPG serta melihat keuntungan yang didapat seperti itu, berimbas pada semakin banyaknya masyarakat banyak yang beralih menggunakan LPG. Lebih lanjut, kebutuhan LPG juga meningkat dari tahun ke tahun. PT Pertamina Persero sebagai perusahaan produsen dan distributor telah memaksimalkan distribusi

LPG ke seluruh wilayah nusantara. Namun demikian, kelangkaan LPG terkadang masih terjadi di beberapa daerah. Salah satu alasannya adalah keterlambatan pengiriman LPG ke SPBE, dan terjadinya peningkatan jumlah permintaan melebihi kuota LPG yang didistribusikan. Hal ini membuat masalah distribusi menjadi hal penting yang diperhatikan. Kondisi ini dapat dianalogikan sebagai *Vehicle Routing Problem* (VRP).

VRP merupakan permasalahan bagaimana menentukan sebuah rute yang terdiri atas beberapa lokasi tujuan. Lokasi tujuan tersebut tersebar secara geografis dan memiliki jarak yang berbeda-beda. Akan disusun sebuah rute kunjungan kendaraan yang berawal dari depo dan akan berakhir di depo kembali. Tujuannya adalah untuk meminimumkan total jarak dari semua rute. (Nallusamy, Duraiswamy, Dhanalaksmi, & Parthiban, 2009). Jika VRP mempunyai kendala waktu pada suatu periode waktu, maka disebut sebagai VRP *with time windows* (VRPTW). Penelitian-penelitian mengenai model VRPTW terus dilakukan untuk mendapatkan keakuratan hasil. Larsen (1999), Cook&Rich (1999), Cordeau (2002), Azi (2007) menyelesaikan VRPTW dengan metode eksak. Anil&Nidhi (2008) menggunakan model VRP untuk mendistribusikan tabung-tabung LPG ke beberapa pabrik dengan pendekatan logistik. Sementara Ayadi&Benadada (2010) menggunakan VRP untuk distribusi LPG dengan mempertimbangkan waktu, ongkos angkut dan jenis kendaraan. Penyelesaian VRP yang dilakukannya dengan algoritma genetik.

Seiring dengan perkembangan penelitian, terdapat banyak metode untuk menyelesaikan VRPTW. Demikian juga aplikasi VRPTW dalam masalah distribusi. Tujuan dari masalah distribusi tidak hanya untuk meminimalkan total waktu perjalanan atau meminimalkan jarak. Seringkali juga mempunyai tujuan untuk memaksimalkan kapasitas angkut atau memaksimalkan jumlah pelanggan yang dilayani. Masalah dengan tujuan ganda dari VRP telah dibahas oleh Hong (1999), Calvete (2007). Salah satu metode untuk menyelesaikan masalah VRP dengan tujuan ganda adalah *goal programming*.

Goal programming merupakan metode yang dapat meminimalkan deviasi/simpangan dari semua tujuan. Jolai&Aghdaghi (2008) menggunakan *goal programming* untuk menyelesaikan model VRPTW. Berdasarkan uraian tersebut, metode *Goal programming* berpotensi untuk digunakan, karena mampu menyelesaikan masalah menjadi optimal dengan tujuan lebih dari satu (*multi objective*). Metode ini akan diterapkan dengan data dari perusahaan LPG di Kota Yogyakarta dan disimulasikan dengan bantuan program komputer LINGO.

2. Model Matematika

Kemampuan *goal programming* untuk menyelesaikan masalah dengan adanya beberapa tujuan, yang masing-masing tujuan dapat saling bertentangan, maka VRP dalam penentuan rute distribusi LPG dapat diselesaikan menggunakan metode ini. Penentuan rute distribusi LPG dalam penelitian ini memperhatikan beberapa hal, yaitu (1) kapasitas angkut kendaraan, (2) waktu distribusi, (3) biaya distribusi, dan (4) jumlah pelanggan yang dapat terlayani.

Pemasaran LPG 3kg dimulai dari Filling Plant/SPPBE/SPPEK/SPBE yang selanjutnya disalurkan ke agen – agen. Agenlah yang bertugas mendistribusikan tabung – tabung LPG 3kg ke pangkalan – pangkalan yang dibawahinya menggunakan truk. Dengan demikian, untuk mempermudah penulisan, didefinisikan **pelanggan** untuk menyatakan pangkalan LPG. **Depot** untuk menyatakan agen LPG.

Pada model ini, diasumsikan kapasitas kendaraan homogen, kecepatan kendaraan dalam melakukan perjalanan selalu konstan, jumlah permintaan konstan, selalu tersedia kendaraan angkut dan pelanggan dapat dikunjungi satu kali dalam periode waktu yang ditetapkan.

Didefinisikan suatu graf $G(N', A)$ merupakan graf berarah yang merepresentasikan jaringan distribusi. Himpunan $N = \{1, 2, \dots, n\}$ adalah himpunan simpul-simpul yang mewakili tiap lokasi pelanggan. $N' = \{0, 1, 2, \dots, n, n + 1\}$ merupakan himpunan yang anggotanya adalah simpul 0 untuk menyatakan depot, simpul-simpul yang menyatakan tiap lokasi pelanggan, dan simpul $n + 1$ untuk menyatakan depot semu dari depot 0. Sedangkan $A = \{(i, j) : i, j \in N'\}$ adalah himpunan garis berarah yang menghubungkan dua simpul. Hal ini merepresentasikan ruas jalan yang menghubungkan antara dua pelanggan atau depot dengan pelanggan.

Selanjutnya, didefinisikan q_i adalah jumlah permintaan pelanggan i , s_i adalah waktu pelayanan pelanggan i , t_{ij} adalah waktu perjalanan dari pelanggan i ke pelanggan j , c_{ij} adalah biaya perjalanan dari pelanggan i ke pelanggan j , dan Q adalah kapasitas angkut kendaraan. Himpunan rute perjalanan kendaraan didefinisikan $R = \{1, 2, \dots, k\}$. TR_k adalah total waktu distribusi pada rute k , B_k adalah total biaya perjalanan rute k , UC adalah biaya perjalanan maksimal yang ditetapkan, UT adalah waktu perjalanan maksimal yang ditetapkan.

Berikut merupakan beberapa variabel yang digunakan:

a. Variabel Keputusan

- 1) Variabel keputusan x_{ij}^k untuk menyatakan ada tidaknya perjalanan dari simpul i ke j dalam rute k .

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{jika terdapat perjalanan kendaraan dari } i \text{ ke } j \text{ pada rute } k \\ 0, & \text{jika tidak ada perjalanan kendaraan dari } i \text{ ke } j \text{ pada rute } k \end{cases} \quad (3.1)$$

- 2) Variabel y_i^k untuk menyatakan dikunjungi atau tidak simpul i pada rute k .

$$y_i^k = \begin{cases} 1, & \text{jika simpul } i \text{ dikunjungi pada rute } k \\ 0, & \text{jika simpul } i \text{ tidak dikunjungi pada rute } k \end{cases} \quad (3.2)$$

- 3) Variabel yang berhubungan dengan waktu pelayanan.

w_i^k adalah waktu mulai pelayanan simpul i pada rute k

b. Variabel Simpangan

Pada penelitian ini, dibahas untuk empat tujuan. Tujuan yang pertama adalah memaksimalkan kapasitas angkut kendaraan, dengan kata lain kapasitas kendaraan yang dimiliki harus dimaksimalkan untuk memenuhi kebutuhan pelanggan disetiap rutenya. Dibentuk variabel simpangan negatif pada setiap rute perjalanan untuk menampung simpangan berupa kekurangan muatan dari kapasitas kendaraan yang dimiliki,

$$\sum_{k \in R} d_{1k}^- = \text{variabel simpangan negatif dari tujuan pertama.}$$

Tujuan kedua adalah meminimumkan total waktu pelayanan. Dibentuk variabel simpangan positif dari tujuan kedua untuk menampung simpangan berupa waktu yang melebihi waktu distribusi yang ditetapkan,

$$d_2^+ = \text{variabel simpangan positif dari tujuan kedua}$$

Tujuan yang ketiga adalah meminimumkan total biaya distribusi. Simpangan yang tidak diharapkan adalah biaya totalnya melebihi dari biaya perjalanan yang disediakan. Variabel simpangan yang dibutuhkan adalah simpangan positif yaitu berupa biaya yang melebihi biaya total perjalanan. Dibentuklah variabel simpangan positif dari tujuan ketiga untuk menampung simpangan melebihi biaya total pelayanan, katakan

$$d_3^+ = \text{variabel simpangan positif dari tujuan ketiga.}$$

Tujuan keempat adalah memaksimalkan banyaknya pelanggan yang dilayani. Simpangan yang kemungkinan terjadi adalah jumlah dari pelanggan yang dilayani kurang dari target yang diinginkan. Simpangan ini berupa jumlah pelanggan yang tidak dapat terlayani. Didefinisikan,

$$d_{4i}^- = \begin{cases} 0, & \text{jika pelanggan } i \text{ dapat terlayani} \\ 1, & \text{jika pelanggan } i \text{ tidak dapat terlayani.} \end{cases}$$

Sehingga simpangan yang berupa jumlah pelanggan yang tidak dapat terlayani dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\sum_{i \in A} d_{4i}^- = \text{variabel simpangan negatif dari tujuan keempat.}$$

Setelah semua variabel didefinisikan, berikut dibentuk model matematika VRP yang dirumuskan dalam bentuk *goal programming*.

Fungsi tujuan dari *goal programming* adalah meminimumkan simpangan atau meminimumkan jumlah semua variabel simpangan yang ada. Penelitian ini menggunakan metode pembobotan, katakan setiap variabel simpangan diberi bobot ω_i . Dirumuskan fungsi tujuan yang meminimumkan variabel simpangan dari tujuan satu sampai empat sebagai berikut.

Meminimumkan

$$Z = \omega_1 \sum_{k \in R} d_{1k}^- + \omega_2 d_2^+ + \omega_3 d_3^+ + \omega_4 \sum_{i \in A} d_{4i}^- . \quad (3.3)$$

Berikut kendala-kendala yang digunakan dalam model:

1) Memaksimalkan kapasitas angkut kendaraan

Jumlah alokasi tiap simpul pada suatu rute belum tentu sama dengan kapasitas angkut kendaraan, karena alokasi tiap simpul beragam. Oleh karena itu, perlu variabel simpangan negatif untuk menampung simpangan pada kejadian total kebutuhan simpul pada rute k kurang dari kapasitas angkut kendaraan. Sehingga diperoleh

$$\sum_{i \in N} q_i y_i^k + d_{1k}^- = Q , \quad \forall k \in R. \quad (3.4)$$

2) Meminimumkan total waktu distribusi

Didefinisikan waktu distribusi pada rute k adalah jumlah total waktu yang dibutuhkan untuk melayani setiap simpul pada rute k , ditambah total waktu perjalanan kendaraan antar simpul pada rute k . Waktu distribusi pada rute k dinotasikan TR_k . TR_k dapat dituliskan sebagai berikut,

$$TR_k = \sum_{i \in 0 \cup N} \sum_{j \in N \cup n+1} t_{ij} x_{ij}^k + \sum_{i \in N} s_i y_i^k , \forall k \in R. \quad (3.5)$$

Tujuan kedua adalah meminimumkan total waktu distribusi, sehingga didefinisikan persamaan (3.6) untuk menjamin total waktu distribusi minimal sebagai berikut.

$$\sum_{k \in R} TR_k - d_2^+ = 0 \quad (3.6)$$

3) Meminimumkan biaya total distribusi

Biaya distribusi pada suatu rute k adalah jumlahan dari biaya distribusi (c_{ij}) dari satu pelanggan (i) ke pelanggan lain (j) yang ada pada rute k . Biaya distribusi rute k dapat dituliskan,

$$B_k = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \cdot x_{ij}^k, \quad \forall k \in R. \quad (3.7)$$

Tujuan ketiga adalah meminimumkan biaya perjalanan. Didefinisikan persamaan (3.8) untuk menjamin total biaya distribusi minimal.

$$\left(\sum_{k \in R} B_k \right) - d_3^+ = 0, \quad (3.8)$$

4) Memaksimumkan banyaknya pelanggan yang dilayani

Jika satu pelanggan dapat dilayani, artinya pelanggan tersebut dilalui oleh salah satu rute kendaraan yang ada. Fungsi tujuan keempat adalah memaksimumkan banyaknya pelanggan yang dilayani. Artinya setiap pelanggan yang ada diharapkan dapat terlayani. Simpangan dari tujuan keempat ini adalah jumlah pelanggan yang tidak terlayani.

Jadi,

$$\sum_{k \in R} y_i^k + d_{4i}^- = 1, \quad \forall i \in N, \quad (3.9)$$

5) Setiap pelanggan hanya dapat dikunjungi tepat satu kali

Hal ini dapat dijamin dengan, jika setiap pelanggan dapat terlayani maka terdapat perjalanan untuk mengunjungi pelanggan tersebut pada salah satu rute yang ada. Dirumuskan masalah ini sebagai berikut,

$$\sum_{j \in N'} x_{ij}^k = y_i^k, \quad \forall i \in N', k \in R, \quad (3.10)$$

6) Setiap rute perjalanan kendaraan berawal dan berakhir di depot

Jika setiap rute perjalanan kendaraan berawal dari depot, maka dipastikan terdapat perjalanan dari depot menuju salah satu pelanggan pada setiap rute. Dirumuskan persamaan kendala (3.11) yang menjamin setiap rute perjalanan berawal dari depot sebagai berikut,

$$\sum_{j \in N} x_{0j}^k = 1, \quad \forall k \in R \quad (3.11)$$

Jika setiap rute perjalanan kendaraan berakhir di depot maka terdapat perjalanan menuju depot pada setiap rute. Sehingga diperoleh

$$\sum_{i \in N} x_{i,n+1}^k = 1, \quad \forall k \in R \quad (3.12)$$

7) Untuk setiap kendaraan yang telah selesai mengunjungi pelanggan, akan langsung meninggalkan pelanggan tersebut (kekontinuan rute)

Jika kendaraan angkut mengunjungi pelanggan i pada rute k , maka kendaraan itu juga harus meninggalkan pelanggan i ,

$$\sum_{i \in 0 \cup N} x_{ir}^k - \sum_{j \in N \cup n+1} x_{rj}^k = 0 \quad \forall r \in N, \forall k \in R \quad (3.13)$$

8) Tidak terdapat *subtour* pada rute yang dibuat

Rute yang terbentuk dapat menjadi suatu rute tunggal, dapat dijamin dengan menggunakan waktu mulai pelayanan setiap simpul. Jika terdapat perjalanan dari simpul i ke j , maka waktu mulai pelayanan simpul j harus kurang sama dengan waktu mulai pelayanan simpul i ditambah lama pelayanan simpul i ditambah lama perjalanan dari i ke j .

$$w_i^k + s_i + t_{ij} - M(1 - x_{ij}^k) \leq w_j^k, \quad \forall i, j \in N', \forall k \in R, \quad (3.14)$$

dengan w_i^k adalah waktu mulai pelayanan simpul i dan M adalah bilangan yang cukup besar. Jika terdapat perjalanan dari i ke j , maka $x_{ij}^k = 1$, maka persamaan (3.14) menjadi,

$$w_i^k + s_i + t_{ij} \leq w_j^k, \quad \forall i, j \in N', \forall k \in R$$

9) Total biaya perjalanan kurang dari biaya maksimal yang ditetapkan

Biaya total perjalanan harus kurang dari biaya perjalanan maksimal yang ditetapkan. Biaya total perjalanan diperoleh dengan menjumlahkan biaya perjalanan pada setiap rute,

$$\sum_{k \in R} B_k \leq UC, \quad (3.15)$$

10) Total waktu distribusi kurang dari waktu maksimal yang ditetapkan

Waktu total perjalanan harus kurang dari waktu perjalanan maksimal yang ditetapkan. Total waktu distribusi diperoleh dengan menjumlahkan waktu distribusi pada setiap rute,

$$\sum_{k \in R} TR_k \leq UT. \quad (3.16)$$

Semua variabel dalam model *goal programming* adalah bilangan non negatif, sehingga perlu didefinisikan persamaan (3.19) untuk menjamin hal tersebut.

$$w_i^k, d_1^+, d_{2i}^-, d_3^+, d_{4i}^- \geq 0. \quad (3.17)$$

Persamaan (3.3) – (3.17) merupakan model matematika penentuan rute distribusi LPG berdasarkan VRP yang penyelesaiannya menggunakan *goal programming*.

3. Simulasi

Berikut akan dilakukan simulasi untuk optimasi distribusi LPG di Kota Yogyakarta menggunakan LINGO. Akan dilakukan input data untuk 5 pelanggan. Depot untuk menyatakan agen LPG, sedangkan pangkalan akan dinotasikan dengan N1,...,N5. Berikut diberikan Tabel 1, Tabel 2 dan Tabel 3, berturut-turut, untuk waktu perjalanan antar node, biaya perjalanan antar node, jumlah permintaan untuk masing-masing node dan waktu pelayanan masing-masing node. Kendaraan pengangkut dapat maksimal dapat membawa 560 tabung gas. Sedangkan maksimal waktu distribusi yang ditetapkan oleh agen adalah 6 jam per minggu, dan biaya distribusi maksimal adalah Rp 10.000,00 per minggu.

Table 1. Waktu perjalanan antar node (menit)

	Depot	N1	N2	N3	N4	N5
Depot	0	10	11	11	9	12
N1	11	0	5	3	11	10
N2	12	5	0	4	15	9
N3	5	4	5	0	5	5
N4	5	6	7	3	0	5
N5	3	7	8	6	7	0

Table 2. Biaya perjalanan antar node (x Rp 1000,00)

	Depot	N1	N2	N3	N4	N5
Depot	0	1.18	1.28	1.47	1.06	1.44
N1	1.35	0	0.54	0.28	1.41	1.18
N2	1.31	0.57	0	0.48	1.80	1.15
N3	0.45	0.41	0.45	0	0.54	0.41
N4	0.54	0.67	0.70	0.35	0	0.51
N5	0.67	0.77	0.80	0.64	0.57	0

Table 3. Jumlah Permintaan dan waktu pelayanan untuk masing-masing node

Pelanggan	N1	N2	N3	N4	N5
Jumlah	90	220	280	60	200

Permintaan (tabung)					
Waktu Pelayanan (menit)	30	75	93	20	67

Berdasarkan *running* dengan LINGO, diperoleh rute distribusi sebagai berikut Depot – N1 – N2 – N5 – Depot, dan Depot – N4 – N3 – Depot. Tampak bahwa semua node telah terlayani. Jika waktu maksimal diubah menjadi 3 jam per minggu, maka rute distribusi menjadi Depot – N3 – N5 – Depot, artinya hanya 2 node yang bisa terlayani.

4. Kesimpulan

Model matematika untuk *vehicle routing problem with time windows* yang diselesaikan dengan *goal programming* telah diperoleh. Selanjutnya diaplikasikan pada rute distribusi LPG. Dari simulasi menggunakan LINGO untuk 5 node (5 pangkalan), diperoleh rute distribusi Depot – N1 – N2 – N5 – Depot, dan Depot – N4 – N3 – Depot.

Daftar Pustaka

- [1] Jolai, F., & Aghdaghi, M. (2008). A Goal Programming Model for Single Vehicle Routing Problem with Multiple Routes. *Journal of Industrial and Systems Engineering* , 154-163.
- [2] Sousa, J. C., Biswas, H. A., Brito, R., & Silveira, A. (2011). A Multi Objective Approach to Solve Capacitated Vehicle Routing Problems with Time Windows Using Mixed Integer Linear Programming. *International Journal of Advanced Science and Technology* , 1-8.
- [3] Azi, N., Gendreau, M., & Potvin, J.-Y. (2007). An exact algorithm for a single-vehicle routing problem. *European Journal of Operational Research* , 755-766.
- [4] Larsen, J. (1999). *Parallelization of the Vehicle Routing Problem with Time Windows*. Institute of Mathematical Modelling. Denmark: Technical University of Denmark.
- [5] Cook, W., & Rich, J. (1999). *A Parallel Cutting-Plane Algorithm for the Vehicle Routing Problems with Time*. Department of Computational and Applied Mathematics. Houston: Rice University.
- [6] Cordeau, J.-F., Gendreau, M., Laporte, G., Potvin, J.-Y., & Semet, F. (2002). A guide to vehicle routing heuristics. *Journal of the Operational Research Society* , 512-522.
- [7] Hong, S., & Park, Y. (1999). A heuristic for bi-objective vehicle routing with time window constraints. *International Journal of Production Economics* , 249-258.
- [8] Calvete H.I., G. C. (2007). A Goal Programming Approach to Vehicle Routing Problems With Soft Time Windows. *European Journal of Operational Research* , 1720-1733.
- [9] Hashimoto H., I. T. (2006). The Vehicle Routing Problem With Flexible Time Windows and Travelling Times. *Discrete Applied Mathematics* , 1364-1383.